

# L'equazione radar

IARA, SdR RadioAstronomia UAI, Astronomia Valli del Noce, Società Italiana di Fisica, IMO

## Abstract

Viene illustrata la fisica che sta alla base del funzionamento di un radar meteorico introducendo l'equazione radar. Il parametro che gioca un ruolo fondamentale per la risoluzione di tale formula è la densità elettronica lineare che, tra le altre cose, determina la distinzione tra echi ipodensi e iperdensi.

...per li sereni tranquilli e puri  
discorre a ora a or subito foco,  
movendo li occhi che stavan sicuri,  
e pare stella che tramuti loco,  
se non che dalla parte ond'el s'accende  
nulla s'en perde, ed esso dura poco...

Dante Alighieri  
Divina Commedia, Paradiso, Canto XV, 13-18

## L'equazione radar

La capacità che ha un radar di rilevare un bersaglio è espressa attraverso una relazione nota come *equazione radar*, la cui dimostrazione offre fondamentali informazioni sul funzionamento dello strumento ed è perciò utile ricavarla da considerazioni generali. Un costituente essenziale del radar è certamente l'antenna, un dispositivo volto ad irradiare o ricevere energia elettromagnetica. Le sue funzioni principali sono quelle di focalizzare la potenza in una data direzione in modo da aumentare la sensibilità, garantire il controllo del fascio esploratore in modo da perlustrare una certa area di copertura e infine permettere la misurazione di informazioni angolari in modo da determinare la direzione di un bersaglio.

Un parametro fondamentale che racchiude in sé le caratteristiche fondamentali dell'antenna è il guadagno di potenza  $G(\theta, \varphi)$  o semplicemente guadagno  $G$ , che esprime la capacità dell'antenna di concentrare la potenza irradiata in una determinata direzione. Tale parametro comprende il concetto di perdite che si verificano attraverso il riscaldamento dell'antenna stessa, attraverso il terreno, assorbimenti vari, perdite delle guide d'onda e di polarizzazione, attraverso qualsiasi accoppiamento con l'antenna oltre che attraverso la potenza irradiata nei lobi laterali.

In generale un'antenna in cui  $G$  è costante, e che quindi ha la caratteristica di irradiare la potenza in modo uniforme in tutte le direzioni e cioè sull'intero angolo solido ( $4\pi$  steradiani), viene definita omnidirezionale o radiatore isotropo. Si può ora definire il guadagno di potenza come il rapporto fra l'intensità di radiazione

nel lobo principale dell'antenna e l'intensità di radiazione di un'antenna isotropa con un'efficienza del 100% avente lo stesso assorbimento di potenza:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{\Delta\theta \cdot \Delta\varphi}$$

dove  $\Delta\theta$  e  $\Delta\varphi$  sono rispettivamente l'ampiezza del fascio in direzione azimutale e in direzione ascensionale, tutto misurato in radianti. L'angolo azimutale  $\theta$  fornisce le informazioni direzionali o di posizione e, come in una bussola magnetica, viene misurato in senso orario partendo dal nord. L'altezza  $\varphi$ , invece, viene misurata partendo dall'orizzonte verso l'alto. In alternativa il guadagno stesso può essere definito come:

$$G = \frac{4\pi \cdot A_{eff}}{\lambda^2}$$

dove  $A_{eff}$  è l'area efficace dell'antenna che solitamente è inferiore all'area reale.

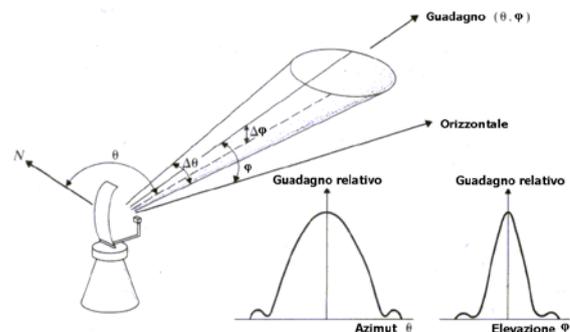


Figura 1 - Azimut, elevazione ed ampiezza di fascio.

I diagrammi dell'antenna sono direzionali in tre dimensioni, produrne uno è un po' come schiacciare un pallone sferico per ottenere una sporgenza. Se si vuole  $G > 1$  in qualche direzione particolare si deve schiacciare il resto ed ammettere  $G < 1$  da qualche altra parte. Il punto importante è che il guadagno integrato attorno ad un'antenna ammonta al valore unitario.

La potenza irradiata da un'antenna isotropa  $P_T$  si distribuisce in modo uniforme su di una sfera in modo tale che il flusso di potenza  $\Phi_T$  ad una distanza  $R_T$  dall'antenna è dato da [1][2]:

$$\Phi_T(R_T) = \frac{P_T}{4\pi R_T^2}$$

Tuttavia le antenne reali non sono omnidirezionali ma concentrano la propria potenza in una data direzione. Per questo è opportuno modificare la precedente equazione tenendo conto della direzione tramite il guadagno d'antenna in modo da ottenere la seguente relazione per il flusso di potenza:

$$\Phi_T(R_T, \theta, \varphi) = \frac{P_T G_T(\theta, \varphi)}{4\pi R_T^2}$$

Tale flusso di potenza investe un bersaglio che espone ad esso una superficie nota come sezione d'urto radar  $\sigma$  (RCS, radar cross section), dipendente dalla forma dell'oggetto colpito, dal materiale che lo costituisce, dalla lunghezza d'onda incidente, etc., per cui il bersaglio reirradierà isotropicamente una potenza data dal prodotto tra il flusso di potenza incidente e la sezione d'urto radar:

$$P_{reirradiata} = \Phi_T \sigma = \frac{P_T G_T \sigma}{4\pi R_T^2}$$

Ad essa è associato un flusso che si ottiene considerando che tale potenza si distribuisce, nel suo tragitto verso il ricevitore, su una sfera di raggio  $R_R$  pari alla distanza tra il bersaglio e il ricevitore stesso:

$$\Phi_R = \frac{P_T G_T \sigma}{(4\pi R_T^2)(4\pi R_R^2)}$$

Del flusso inviato al ricevitore solo una parte sarà intercettata dall'antenna, che è in grado di raccogliere una potenza proporzionale alla sua area efficace  $A_{eff}$ , cosicché la potenza al ricevitore  $P_R$  risulta essere pari a:

$$P_R = \frac{P_T G_T \sigma A_{eff}}{(4\pi R_T^2)(4\pi R_R^2)}$$

Utilizzando la relazione per l'area efficace si ottiene la fondamentale equazione radar generale, riferibile immediatamente al caso forward-scatter:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R_T^2 R_R^2}$$

L'equazione radar nel caso back-scatter si può ottenere direttamente dalla precedente tenendo conto che  $R_T = R_R = R$ :

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4}$$

L'equazione radar si rivela tuttavia insufficiente in quanto non indica se la potenza è superiore o inferiore al livello di rumore di fondo. È noto infatti che il rumore è sempre presente, sia come rumore interno causato da componenti elettronici, sia come rumore esterno proveniente da sorgenti naturali, quali l'atmosfera, o da interferenze prodotte dall'uomo. Queste sorgenti di rumore sono ad ampia banda rispetto al segnale radar, ed una funzione dei ricevitori radar è quella di adattare l'ampiezza di banda per accettare il segnale, evitando l'entrata di qualsiasi ulteriore rumore. Pertanto si è soliti comparare la potenza ricevuta dal bersaglio con il rumore di fondo medio  $N$  presente nel sistema, ottenendo il rapporto segnale-rumore (*signal to noise ratio*, SNR):

$$SNR = \frac{P_R}{N} = \frac{P_T G_T G_R \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R_T^2 R_R^2 N}$$

#### Equazione radar nel caso ipodenso

Le equazioni radar viste precedentemente possono essere diversamente considerate nel caso in cui il bersaglio sia una traccia meteorica di tipo ipodenso. Per semplicità, si può partire da un sistema radar a back-scatter, assumendo che la traccia sia approssimabile ad un cilindro circolare infinitamente lungo, il cui diametro risulti molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda del radar, e che solo la componente elettronica della traccia contribuisca alla diffusione.

Sotto queste ipotesi, la sezione d'urto radar di una traccia ipodensa in funzione del tempo è espressa da [3][4]:

$$\sigma = \frac{r_e^2 q^2 R \lambda}{2} \cdot e^{-\left(\frac{8\pi^2 r_0^2}{\lambda^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{32\pi^2 D t}{\lambda^2}\right)}$$

dove  $r_e$  è il raggio classico dell'elettrone e vale circa  $2.8178 \cdot 10^{-15}$  m,  $D$  il coefficiente di diffusione della traccia e si misura in  $m^2/s$  ed  $r_0$  il raggio iniziale della traccia meteorica in m. Il primo dei tre fattori nella equazione (5.11) rappresenta la sezione d'urto radar iniziale della traccia meteorica ( $t = 0$ ) nel caso ideale, in cui il raggio iniziale della traccia sia nullo ( $r_0 = 0$ ).

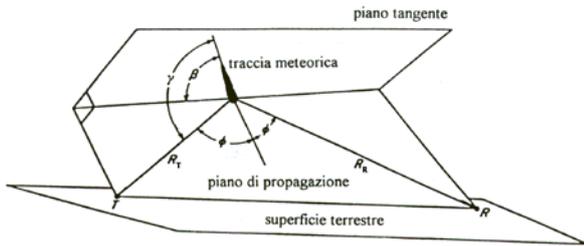
Il secondo termine è il fattore di attenuazione dovuto al raggio iniziale finito della traccia. Infine il terzo termine rappresenta l'attenuazione del segnale causata dall'interferenza distruttiva innescata dalla progressiva diffusione ambipolare della traccia. Gli ultimi due termini sono stati calcolati assumendo un modello in cui la distribuzione degli elettroni attraverso la traccia è gaussiana e l'aumento del raggio a seguito della diffusione ambipolare obbedisce alla relazione  $r(t) = \sqrt{4Dt}$ , in cui  $r(t)$  è il raggio della traccia

meteorica al tempo  $t$  e  $D$  è il coefficiente di diffusione [5].

Sostituendo la sezione d'urto nell'equazione radar generale per un sistema a back-scatter si ottiene l'equazione radar a back-scatter per una traccia meteorica ipodensa, valida a grandi lunghezze d'onda ( $\lambda > r_0$ ) [1]:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^3 q^2 r_e^2}{2(4\pi)^3 R^3} e^{-\left(\frac{8\pi^2 r_0^2}{\lambda^2}\right)} e^{-\left(\frac{32\pi^2 D t}{\lambda^2}\right)}$$

Passando ad un radar a forward-scatter entrano in gioco numerose variabili e la geometria del sistema diventa molto complessa.



**Figura 2** - Geometria di un sistema radar a forward scatter:  $R$  è il ricevitore e  $T$  il trasmettitore.

L'equazione radar completa nel caso ipodenso per un sistema a forward-scatter è data da:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^3 q^2 r_e^2 \sin^2 \alpha}{(4\pi)^3 R_T R_R (R_T + R_R) (1 - \cos^2 \beta \sin^2 \phi)} \cdot e^{-\left(\frac{8\pi^2 r_0^2}{\lambda^2 \sec^2 \phi}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{32\pi^2 D t}{\lambda^2 \sec^2 \phi}\right)}$$

dove  $R_T$  ed  $R_R$  rappresentano le distanze del trasmettitore e del ricevitore dal punto della traccia in cui è soddisfatta la condizione di riflessione,  $\beta$  è l'angolo tra la traccia e il piano di propagazione (ossia il piano in cui giacciono  $R_T$  ed  $R_R$ ), ed infine  $\phi$  è la metà dell'angolo tra  $R_T$  ed  $R_R$  (nel piano di propagazione). Il significato dei tre termini che compongono l'equazione per il radar a forward-scatter sono analoghi a quelli visti nel caso del radar a back-scatter. L'angolo  $\alpha$  che compare nel numeratore del primo termine è l'angolo compreso tra il vettore campo elettrico dell'onda incidente sulla traccia meteorica ed  $R_R$ . Esso è una misura della variazione di polarizzazione dell'onda elettromagnetica nella diffusione, mentre nel back-scatter tale angolo è sempre  $\alpha = 90^\circ$ .

Dal confronto tra le due equazioni radar emergono alcune differenze rilevanti tra i due sistemi. Prima di tutto, è utile stabilire un tempo caratteristico di decadimento per un eco ipodenso, definito come il tempo necessario al segnale per ridursi di un fattore  $1/e$  rispetto al suo valore massimo. Questo tempo per un sistema a back-scatter vale:

$$\tau = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 D}$$

mentre per un sistema a forward-scatter è dato da:

$$\tau = \frac{\lambda^2 \sec^2 \phi}{32\pi^2 D}$$

Dal confronto immediato tra le due equazioni si ricava che, a parità di lunghezza d'onda e di coefficiente di diffusione, il tempo di decadimento per un sistema a forward-scatter è maggiore di quello di un radar a back-scatter di un fattore  $\sec^2 \phi$ .

### Equazione radar nel caso iperdenso

Lo stesso ragionamento può essere fatto per dedurre le equazioni radar nel caso iperdenso. In tali condizioni si assume che la scia di plasma sia assimilabile ad un cilindro metallico che si espande radialmente per diffusione. La sezione d'urto della traccia iperdenso per un sistema radar a back-scatter è [4]:

$$\sigma = \frac{R}{4} \left[ 4D t \cdot \ln \left( \frac{r_e q \lambda^2}{4\pi^2 D t} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione radar generale, si deriva l'equazione radar per una traccia iperdenso in un sistema a back-scatter:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2}{4(4\pi)^3 R^3} \left[ 4D t \cdot \ln \left( \frac{r_e q \lambda^2}{4\pi^2 D t} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

che è applicabile approssimativamente finché il logaritmo non diventa nullo, ossia fino al tempo:

$$\tau' = \frac{r_e q \lambda^2}{4\pi^2 D}$$

Trascorso questo periodo, la traccia continua a seguire la relazione valida per le tracce ipodense.

Per il sistema a forward-scatter l'equazione radar nel caso iperdenso risulta molto più complessa in quanto nella sezione d'urto si tiene conto della geometria del sistema:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sin^2 \alpha}{2(4\pi)^3 R_T R_R (R_T + R_R) (1 - \cos^2 \beta \sin^2 \phi)} \left[ \frac{4D t}{\sec^2 \phi} \cdot \ln \left( \frac{r_e q \lambda^2 \sec^2 \phi}{4\pi^2 D t} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

che è valida fino all'annullamento del logaritmo, cioè fino al tempo:

$$\tau' = \frac{r_e q \lambda^2 \sec^2 \phi}{4\pi^2 D}$$

dopo il quale per la potenza del segnale continua a valere la relazione vista precedentemente.

Si può notare che le equazioni per i radar a forward-scatter, sia nel caso ipodenso che iperdenso, ponendo  $R_T = R_R = R$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , si riducono alle equazioni per un radar a back-scatter. Tutte le relazioni precedenti sono state ricavate supponendo che la lunghezza d'onda fosse molto maggiore del raggio iniziale della traccia, in caso contrario bisognerebbe adottare altre relazioni valide a piccole lunghezze d'onda [5.4]. La lunghezza d'onda di transizione tra i due casi è data dalla relazione:

$$\lambda_T = \left( \frac{128\pi^4 D^2 R}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

che per i valori tipici del sistema radar utilizzato nel presente lavoro ( $R = 500$  km,  $v = 40$  km/s e  $D = 3$  m<sup>2</sup>/s) vale circa 3 metri.

### ***Bibliografia***

- [1] Kingsley S., Quegan S.: Understanding Radar Systems, edito da McGraw-Hill, London, (1992)
- [2] Skolnik M.: Radar Handbook, McGraw-Hill, New York, (1970)
- [3] McKinley D.W.R.: Meteor Science and Engineering, edito da McGraw-Hill Book Company, (1961)
- [4] Sugar G.R.: Radio propagation by reflection from meteor trains, *Proceedings of the IEEE*, (1964)
- [5] Keiser T.R.: Radio echo studies of meteor ionization, *Advan. Phys.*, 2, p. 495-544, (1953)